Задача Д1

4.1. Условия задачи. Барабан радиусом R и весом P (рис.4.1), имеющий выточку радиусом $r = 0{,}6\ R$ с намотанным на нее тросом, находится в зацеплении с наклонной плоскостью (может катиться по плоскости без проскальзывания). Угол между наклонной плоскостью и горизонталью α. Радиус инерции барабана с тросом $\rho = 0{,}5\ R$.

На барабан помимо силы веса $\vec{P}$ действуют следующие активные (заданные) нагрузки:

- сила натяжения троса $\vec{T}$, действующая по касательной к выточке, точка её приложения задается углом β, отсчитываемым от нормали к плоскости, как показано на рис. 4.1;

- горизонтальная сила $\vec{Q}$, приложена к оси C барабана;

- пара сил с моментом M.

Численные значения характеристик плоскости, барабана и заданных нагрузок для различных вариантов задачи приведены в табл. *Д 1*.

Под действием указанных сил барабан начинает движение из состояния покоя.

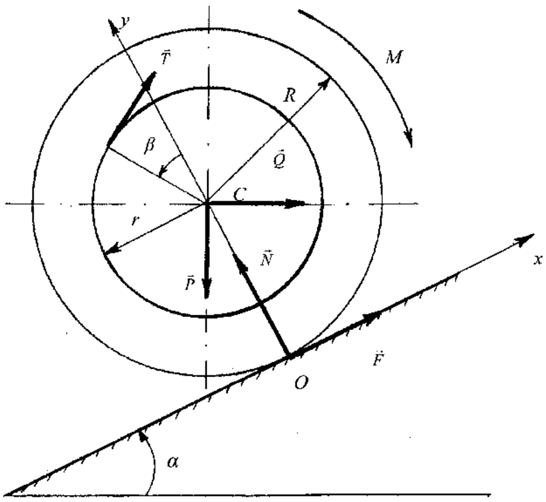

Таблица Д1

Исходные данные к задаче Д1

№ строки	*R, м*	*P, кН*	*α, град*	*β, град*	*Q, кН*	*M, кНм*	*T, кН*
7	0,8	12	15	- 90	4	4	- 1
8	**0,9**	**8**	- 15	- 60	- 4	- 6	4
9	1,0	10	**30**	**- 45**	**2**	- 4	3
0	1,2	12	- 30	- 30	**- 2**	**- 6**	**4**
	По первой цифре шифра		По второй цифре шифра			По третьей цифре шифра	

Определим ускорение центра масс барабана с помощью уравнений плоскопараллельного движения твердого тела. Применительно к рассматриваемой расчетной схеме (рис.1.1) они принимают вид:

$$m\ddot{x}_c = Psin\alpha - Qcos\alpha - Tcos\beta - F$$
$$m\ddot{y}_c = -P\cos\alpha - Qsin\alpha + T\,sin\beta + N$$
$$I_C\varepsilon = Tr - M + FR$$

Вычислим предварительно ряд характеристик барабана, входящих в уравнения движения и, следовательно, необходимых для дальнейших расчетов:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{12000}{9,81} = 1223\,кг;$$
$$I_C = m\rho^2 = m(0,5R)^2 = 1223(0,5\cdot 0,8)^2 = 195,68\ кг\cdot м^2;$$
$$r = 0,6R = 0,6\cdot 0,8 = 0,48\ м;$$
$$I_0 = I_C + mR^2 = 195,68 + 1223\cdot 0,8^2 = 1174\ кг\cdot м^2.$$

$$m = \frac{P}{g} = \frac{8000}{9.81} = 815.5\,кг$$
$$I_c = m\,\rho^2 = m(0.5R)^2 = 815.5(0.5\cdot 0.9)^2 = 165.139\,кг\cdot м^2$$
$$r = 0.6R = 0.6\cdot 0.9 = 0.54\,м$$
$$I_0 = I_c + mR^2 = 165.139 + 815.5\cdot 0.9^2 = 825,7\,кг\cdot м^2$$

Исключим из уравнения (в) неизвестное угловое ускорение ε, заменив его эквивалентной величиной $\ddot{x}_C/R$ (см. выражение (4.2)). Одновременно разделим это уравнение на постоянное число R:

$$-Psin\alpha + Qcos\alpha + Tcos\beta - F$$

$$I_C\frac{\ddot{x}_C}{R^2} = T\,\frac{r}{R} - \frac{M}{R} + F. \tag{г}$$

Такая запись уравнения (в) позволяет сравнительно просто исключить из уравнений движения неизвестную силу $\vec{F}$ за счет почленного сложения уравнений (а) и (г).

ускорение центра масс барабана:

$$\ddot{x}_C = \frac{-Psin\alpha + Qcos\alpha + T\left(cos\beta + \frac{r}{R}\right) - \frac{M}{R}}{m + \left(\frac{I_c}{R^2}\right)} = ¿\,\frac{8000\cdot\sin 30° - 2000\cdot\cos 30° + 4000\left(\cos 45° + \frac{0,54}{0,9}\right) - \frac{6000}{0,9}}{825,7 + \left(\frac{165,139}{0,9^2}\right)}$$

Вычислим также величину силы F , которая необходима для обеспечения качения барабана без проскальзывания. Из уравнения (а) следует, что

$$F = P\sin\alpha - Q\cos\alpha + T\cos\beta - m\ddot{x}_C =$$

$$¿\,12000\cdot\sin 30^0 - 2000\cdot\cos 30^0 + 4000\cos 30^0 - 1223\cdot 1,436 = 5975\ \ H\ .$$

$$F = Psin\,\alpha - Qcos\alpha + Tcos\,\beta - m\,\ddot{x}_C = ¿\,8000\cdot\sin 30 - 2000\cdot\cos 30 + 4\,000\cdot\cos 45 - 825.7\cdot 0.805 = 4432\,H$$

Для определения закона движения центра масс барабана служит полученное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}_C = 0,805.$$

Интегрируя данное выражение, получаем:

$$\dot{x}_C = V_c = 0,805t + C_1;\ x_c = 0,4025t^2 + C_1 t + C_2$$

Закон движения центра масс барабана:

$$x_c = 0,4\,425\,t^2\,м;$$

$$y_c = R = 0,9\ м.$$

Найдем значение вторым способом. Для этого составим уравнение вращательного движения барабана вокруг оси, проходящей через точку контакта барабана и плоскости – через точку О:

$$\frac{\left(8000\cdot 0,9\cdot\sin 30 - 2000\cdot 0,9\cdot\cos 30 - 6000 + 4000\cdot\left(0,54 + 0,9\cos 45\right)\right)}{825,7} = 0,9043$$

$$\ddot{x}_c = \varepsilon R = 0,904\cdot 0,9 = 0,814$$

Задача СМ1

Условие задачи. Для стального стержня заданной длины (рис.1.1) и нагруженного тремя осевыми силами P_1, P_2 и P_3 необходимо:

– построить эпюру продольных сил *N*;

– при допускаемых напряжениях на растяжение $[\sigma]_p = 80$ и на сжатие $[\sigma]_c = 80$ МПа подобрать постоянное по длине поперечное сечение;

– построить эпюру нормальных напряжений σ по длине бруса;

– построить эпюру продольных перемещений сечений бруса, приняв модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа;*

– вычислить работу внешних сил и потенциальную энергию деформации бруса.

Необходимые исходные данные взять из табл. 1.1.

Методические рекомендации. Для построения эпюры продольных сил использовать метод сечений. Из этого метода следует, что *продольная сила в рассматриваемом сечении численно равна алгебраической сумме всех сил, расположенных по одну сторону от сечения*. При суммировании силу необходимо считать положительной, если она растягивает стержень (направлена от сечения), и отрицательной – если сжимает (направлена к сечению).

Так как допускаемые напряжения на растяжение и на сжатие неодинаковы, площадь поперечного сечения определяется как для растянутых, так и для сжатых участков. В качестве расчетной выбирается большее из полученных значений.

Таблица 1.1

Исходные данные к задаче СМ1

№ строки	Схема на рис. 1.1	P_1	P_2	P_3	l_1	l_2	l_3
		кН			*м*		
8	**8**	170	230	130	1,2	1,5	1,1
9	**9**	180	240	140	1,3	1,6	4,1
0	**0**	190	250	150	1,4	1,7	1,3
	В	**Б**	**В**	**Б**	**А**	**Б**	**В**
	0	**9**	**0**	**9**	**8**	**9**	**0**

8

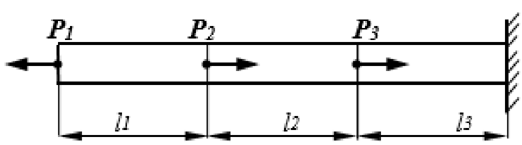

Рис. 1.1

1. Для построения эпюры продольных сил N_z надо знать все приложенные к брусу силы, к которым относятся заданные нагрузки и опорные реакции.

Определяем опорную реакцию в заделке (рис.). При рассматриваемой схеме нагружения реакция заделки имеет только горизонтальную составляющую $R_A(рис.\,1.1)$. Для определения ее численного значения используем условие равновесия $\sum F_{kz}=0$:

$$R_A+P_1-P_2-P_3=0.$$

Следовательно,

$$R_A=-P_1+P_2+P_3=-180+250+140=210\,кН.$$

Определяем продольные силы N_z. Разобьем брус на участки I, II, III и воспользуемся методом сечений (рис. 1.3а). Напомним, что при составлении аналитического выражения для N_z суммируются силы, находящиеся по одну сторону от сечения, причем силы, направленные от сечения, считаются положительными, а направленные к сечению – отрицательными. С учетом сказанного получаем:

– участок I $N_1=P_1=-180\,кН;$

– участок II $N_2=P_1+P_2=-180+250=70\,кН;$

– участок III $N_3=70+140=210\,кН.$

Строим эпюру N_z, т. е. график, показывающий изменение продольной силы по длине бруса. Выбираем масштаб эпюры и откладываем на каждом участке положительные значения $N_z\,вверх$, отрицательные – вниз. Эпюра N_z показана на рис. 1.2 б.

2. Определяем площадь поперечного сечения бруса.

Условие прочности при растяжении

$$\sigma_{max,\,p}=\frac{N_{max}}{S}\leq[\sigma]_p.$$

Для обеспечения прочности растянутых участков бруса площадь поперечного сечения

$$S\geq\frac{N_{max}}{[\sigma]_p}=\frac{210\cdot10^3\cdot10^4}{160\cdot10^6}=13{,}125\,см^2.$$

Из условия прочности при сжатии

$$[\sigma]_{max,c}=¿N_{min}\vee\frac{¿}{S}\leq[\sigma]_c¿$$

площадь поперечного сечения сжатых участков должен составить

$$S\geq\frac{N_{max}}{[\sigma]_c}=\frac{180\cdot10^3\cdot10^4}{80\cdot10^6}=22{,}5\,см^2$$

Так как сечение бруса по его длине постоянное, то, для обеспечения прочности всех участков, окончательно следует выбирать большую площадь, т. е. $S=22{,}5\ см^2$.

3.Определям напряжения в поперечных сечениях бруса:

$$- \textit{участок I } \sigma_1 = \frac{N_1}{S} = \frac{180 \cdot 10^3}{22.5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = -80\ МПа;$$

$$- \textit{участок II } \sigma_2 = \frac{N_2}{S} = \frac{70 \cdot 10^3}{22,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 31,1\ МПа;$$

$$- \textit{участок III } \sigma_3 = \frac{N_3}{S} = \frac{210 \cdot 10^3}{22,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 93,3\ МПа;$$

По полученным значениям строим эпюру σ_z. (рис.1.2в)

4. Строим эпюру продольных перемещений u_zпоперечных сечений бруса. Предварительно определяем абсолютные удлинения всех участков бруса:

$$- \textit{участок I } \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES} = \frac{180 \cdot 10^3 \cdot 1.2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 22.5 \cdot 10^{-4}} = 0,48\ мм;$$

$$- \textit{участок II } \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 1.6 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 22.5 \cdot 10^{-4}} = -0{,}248\ мм;$$

$$- \textit{участок III } \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{ES} = \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 1.3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 22.5 \cdot 10^{-4}} = -0,606\ мм;$$

Вычисляем значения продольных перемещений характерных сечений бруса. Давая сечениям номера 0, 1, 2, 3 (рис.1.3а), имеем:

– сечение 3 $\quad u_3 = \Delta l_3 = -0,606\ мм;$

– сечение 2 $\quad u_2 = u_3 + \Delta l_2 = -0{,}606 - 0,248 = -0{,}854\ мм;$

– сечение 1 $\quad u_1 = u_2 + \Delta l_1 = -0{,}374\ мм.$

5.Вычисляем потенциальную энергию упругой деформации бруса W и работу внешних сил A.

Так как в пределах каждого участка продольная сила N и жесткость бруса постоянны, то потенциальную энергию деформации вычислим по формуле

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i^2 l_i}{2ES}, ¿$$

¿

где n – количество участков. При $n = 3$ находим

$$W = \frac{N_1^2 l_1}{2ES} + \frac{N_2^2 l_2}{2ES} + \frac{N_3^2 l_3}{2ES} = ¿$$

$$\frac{(-180 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 22,5 \cdot 10^{-4}} + \frac{(70 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,6}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 22,5 \cdot 10^{-4}} + \frac{(210 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 22,5 \cdot 10^{-4}} = 115,6$$

Дж

Работа внешних сил вычисляется по формуле

$$A = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} P_j u_{j,}$$

где $m = 3$ – количество внешних сил (реакция R_A работы не совершает, так как точка ее приложения неподвижна);

u_j– перемещение точки приложения силы P_j, взятое с эпюры u_z.

В нашем случае получим

$A = \frac{1}{2} P_1 u_1 + \frac{1}{2} P_2 u_2 + \frac{1}{2} P_3 u_3 = \frac{1}{2} (P_1 u_1 + P_2 u_2 + P_3 u_3) = ¿$

$¿ \frac{1}{2} * (-180 \cdot 10^3 \cdot 0,374 \cdot 10^{-3} + 250 \cdot 10^3 \cdot 0,854 \cdot 10^{-3} + 140 \cdot 10^3 \cdot 0,606 \cdot 10^{-3}) = 115,51$ Дж

Расхождение величин W и A $\textit{меньше}\, 1\%$.

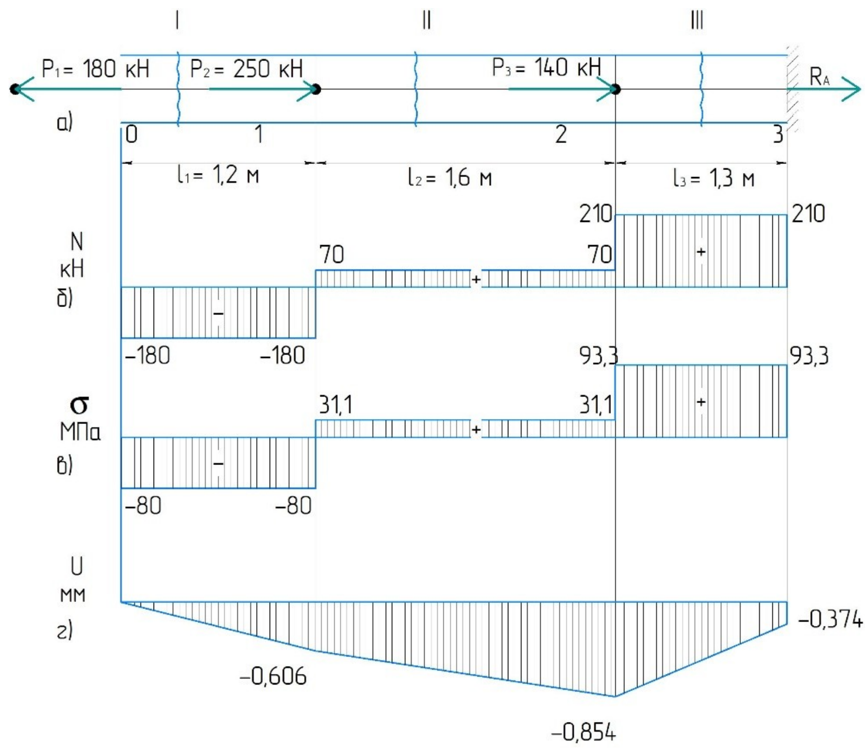

Рис. 1.2